

ریاضی به روش گفت‌وگو

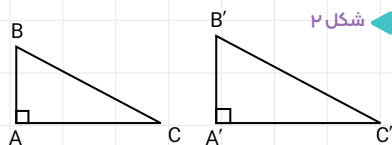


قضیه فیثاغورس از مثلث قائم‌الزاویه
تا دایره مثلثاتی و معادله جبری دایره

خسرو داودی و آرش رستگار

با هم برابر باشند، چون مجموع زاویه‌های مثلث 180° است، پس: $\hat{C} = \hat{C}'$ و حالت تشابه ز ز خواهد بود. یعنی تساوی دو زاویه به دست می‌آید نه ز ز. پس حالت‌های تشابه مثلث‌ها با حالت‌های تساوی مثلث‌ها منطبق نیستند.

مرجان: بیا ادامه بدهیم. برای مثلث‌های قائم‌الزاویه متشابه $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ (شکل ۲) که رأس‌های A و A' قائمه هستند، در حالت ز ز اگر یکی از دو زاویه مساوی قائمه باشند، تساوی یکی از زاویه‌های دیگر برای تشابه مثلث‌ها کفایت می‌کند. پس کافی است بدانیم: $\hat{B} = \hat{B}'$ یا بدانیم: $\hat{C} = \hat{C}'$ و با داشتن هر یک از این تساوی‌ها نتیجه خواهیم گرفت: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

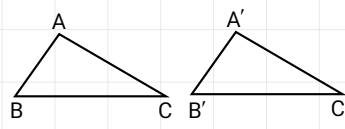


خانم صورتگر که از پیشرفت بحث راضی بود گفت: «حال رابطه فیثاغورس را برای هر دوی این مثلث‌های قائم‌الزاویه متشابه بنویسید و مقایسه کنید.»
مرجان روی تخته نوشت:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$A'B'^2 + A'C'^2 = B'C'^2$$

مرجان همین‌جا مکث کرد. او نمی‌دانست چه ربطی بین این دو تساوی وجود دارد.



شکل ۱

در شکل ۱، اگر مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ داده شده باشند و رأس‌های A و A' با هم و رأس‌های B و B' با هم و رأس‌های C و C' با هم متناظر باشند، حالت ض ض ض را داریم؛ یعنی:

$$AB = A'B'$$

$$AC = A'C'$$

$$BC = B'C'$$

مریم: پرش از دنیای تساوی مثلث‌ها به دنیای تشابه مثلث‌ها کاری ساده است. کافی است به جای تساوی اضلاع، تساوی نسبت‌های آن‌ها را فرض کنیم. یعنی اگر داشته باشیم $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ حالت ض ض ض از تشابه به دست می‌آید.

مرجان: حالت ض ض ض هم ساده است. مثلاً اگر $\hat{A} = \hat{A}'$ و $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ تشابه مثلث‌ها به حالت ض ض ض اتفاق افتاده است. اما حالت ز ز کمی مشکوک است. مثلاً باید گفت $\hat{A} = \hat{A}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\frac{AB}{A'B'} = ?$ که به نظر معنی ندارد.

مریم: اگر دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{B}'$ که متناظرند و دو زاویه $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ که متناظرند هر دو

خانم صورتگر از دانش‌آموزان خواست حالت‌های تساوی مثلث‌ها را با حالت‌های تشابه مثلث‌ها مقایسه کنند و بعد حالت‌های تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویه را بیرون بکشند. او گفت این مسئله را برای درک بهتر قضیه فیثاغورس پیش می‌کشد. خانم صورتگر توضیح داد: «مانند تساوی مثلث‌ها که به سه حالت (ض ض ض) (ض ض ز) (ز ز ز) آن را یاد گرفتید، برای تشابه دو مثلث هم سه حالت تشابه وجود دارد:

۱. اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه متناظر از مثلث دیگری برابر باشند، آن دو مثلث متشابه می‌شوند (ز ز).
۲. اگر دو ضلع از یک مثلث با دو ضلع از مثلث دیگری متناسب باشند و زاویه بین ضلع‌های متناسب برابر باشند، دو مثلث متشابه می‌شوند (ض ض ز).
۳. اگر سه ضلع از یک مثلث با سه ضلع از مثلث دیگری متناسب باشند، دو مثلث با هم متشابه هستند (ض ض ض).

مرجان و مریم: گروهی تشکیلی دادند و در برابر سایر دانش‌آموزان، پای تخته با هم به مباحثه پرداختند.

مرجان: حالت‌های تساوی مثلث را می‌دانیم. ض ض ض، ض ض ز و ز ز ز. اولی نماینده دو ضلع و زاویه بین، و دومی دو زاویه و ضلع بین و سومی نماینده سه ضلع هستند. اگر بخواهم دقیق‌تر بگویم:

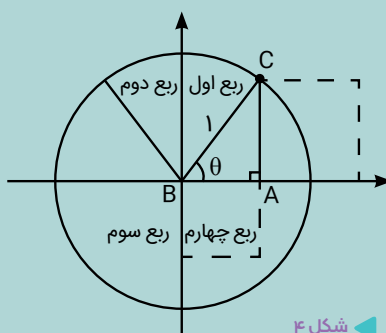
مریم: نکته جالبی به نظرم رسید. اگر قرینه آینه‌ای C نسبت به محور yها را C' بنامیم، نقطه C' متناظر زاویه‌ای مانند α می‌شود که سینوس و کسینوس آن با θ برابر است؛ به‌جز اینکه علامت کسینوس عوض می‌شود. پس رابطه $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ هنوز برقرار است، چون: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$\sin\alpha = \sin\theta \quad \text{و} \quad \cos\alpha = -\cos\theta$$

همین‌طور می‌توان دید در ربع سوم و ربع چهارم نیز اگر تصویر C را که در حال حرکت روی دایره مثلثاتی است، روی محور xها و محور yها در نظر بگیریم و آن‌ها را $\sin\theta$ و $\cos\theta$ بنامیم، باز هم رابطه $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ برقرار است. خانم صورتگر با شوق تمام مریم را تشویق کرد و گفت: «آفرین بر تو مریم! چیزی که تو کشف کردی همان معادله دایره به شعاع واحد و در مختصات دکارتی است.

اگر هر نقطه C را روی دایره واحد با دوتایی مرتب (x, y) نمایش دهیم که x و y طول تصویرهای نقطه C بر محورهای xها و yها باشند، همه نقاط در معادله جبری $x^2 + y^2 = 1$ صدق می‌کنند. پس معادله دایره همان قضیه فیثاغورس است. وقتی با زاویه‌های حاده کار می‌کردیم، در پارادایم مثلث بودیم و سینوس و کسینوس را به کمک مثلث قائم‌الزاویه می‌فهمیدیم. اما وقتی به ربع دوم وارد شدیم زاویه ما منفرد شد و به پارادایم دایره مثلثاتی وارد شدیم. هنوز هم سینوس و کسینوس زاویه منفرد به کار علم مثلثات که به حل مثلث می‌پردازد می‌آید. اما وقتی وارد ربع سوم و ربع چهارم می‌شویم می‌توانیم به سینوس و کسینوس به عنوان تابع‌هایی روی همه زاویه‌های با مقدار در عددهای حقیقی فکر کنیم. یعنی دنیایی که در آن زندگی می‌کنیم در هر مرحله عوض می‌شود.»

تا از هر مثلث قائم‌الزاویه دقیقاً یکی را مشخص کرده باشیم. یعنی هر θ دقیقاً یک مثلث قائم‌الزاویه را مشخص می‌کند که وتر آن برابر یک باشد. در این صورت: $AB = \cos\theta$ و $AC = \sin\theta$. پس می‌توان کسینوس را به سایه و سینوس را به وجه زاویه θ ترجمه کرد. رابطه فیثاغورس تبدیل می‌شود به رابطه $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ که قبلاً با آن آشنا هستید. حال نقطه C را روی دایره مثلثاتی به شعاع ۱ و به مرکز B در نظر بگیرید (شکل ۴).

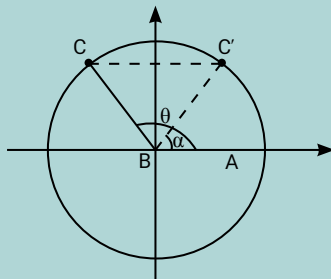


شکل ۴

وقتی نقطه C در ربع اول قرار گرفته است سایه آن روی محور xها، $\cos\theta$ و تصویر قائم آن روی محور yها به اندازه CA از مبدأ فاصله خواهد داشت که برابر است با $\sin\theta$.

حال نقطه C را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت دهید و تصویرهای آن را روی محورهای x و y بررسی کنید.»

مرجان: وقتی وارد ناحیه دوم می‌شویم زاویه θ منفرد می‌شود (شکل ۵). $\sin\theta$ عددی مثبت در بازه [۰، ۱] باقی می‌ماند. اما $\cos\theta$ به سمت دیگر محور xها می‌رود و عددی منفی در بازه [۰، -۱] را به دست می‌دهد.



شکل ۵

مریم گفت: «باید از تساوی نسبت اضلاع متناظر استفاده کنیم. فرض کنید این نسبت مساوی برابر x باشد. یعنی:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = x$$

در این صورت: $AB = x \cdot A'B'$

$$AC = x \cdot A'C'$$

$$BC = x \cdot B'C'$$

بنابراین اگر رابطه دوم $A'B'^2 + A'C'^2 = B'C'^2$ را در x ضرب کنیم، رابطه اول به دست می‌آید.

خانم صورتگر گفت: «بسیار عالی! شما ربط بین دو رابطه فیثاغورس را به دست آوردید. اما من همین حرف شما را به صورت دیگری تکرار می‌کنم. در رابطه اول بر BC^2 و در رابطه دوم بر $B'C'^2$ تقسیم کنید:

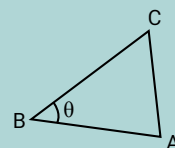
$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{A'B'}{B'C'}\right)^2 + \left(\frac{A'C'}{B'C'}\right)^2 = 1$$

از رابطه تشابه داریم: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ و پس دو رابطه فیثاغورس دقیقاً یک چیز هستند.»

مرجان با تعجب فریاد کشید: «عجب! نسبت‌های $\frac{AB}{BC}$ و $\frac{A'B'}{B'C'}$ برای هر مثلث قائم‌الزاویه متشابه با $\triangle ABC$ همان هستند.»

خانم صورتگر ادامه داد: «آفرین مرجان! این نسبت‌ها را نسبت ضلع زاویه قائمه به وتر می‌نامیم. سال آینده با این موضوع آشنا می‌شوید که در مثلث ABC با زاویه قائمه A، اگر $\hat{B} = \theta$ بنامیم، $\frac{AB}{BC}$ را کسینوس θ ($\cos\theta$) و $\frac{AC}{BC}$ را سینوس θ ($\sin\theta$) می‌نامند.



شکل ۳

نام سینوس از کلمه سانسکریت **جیوا** گرفته شده که در عربی به جیب تبدیل شده است. در ترجمه از عربی به لاتین، به اشتباه جیب را به معنی گریبان یا یقه گرفتند و به سینوس به معنی سینه یا بغل ترجمه کردند. می‌توانید برای سادگی فرض کنید: $BC=1$